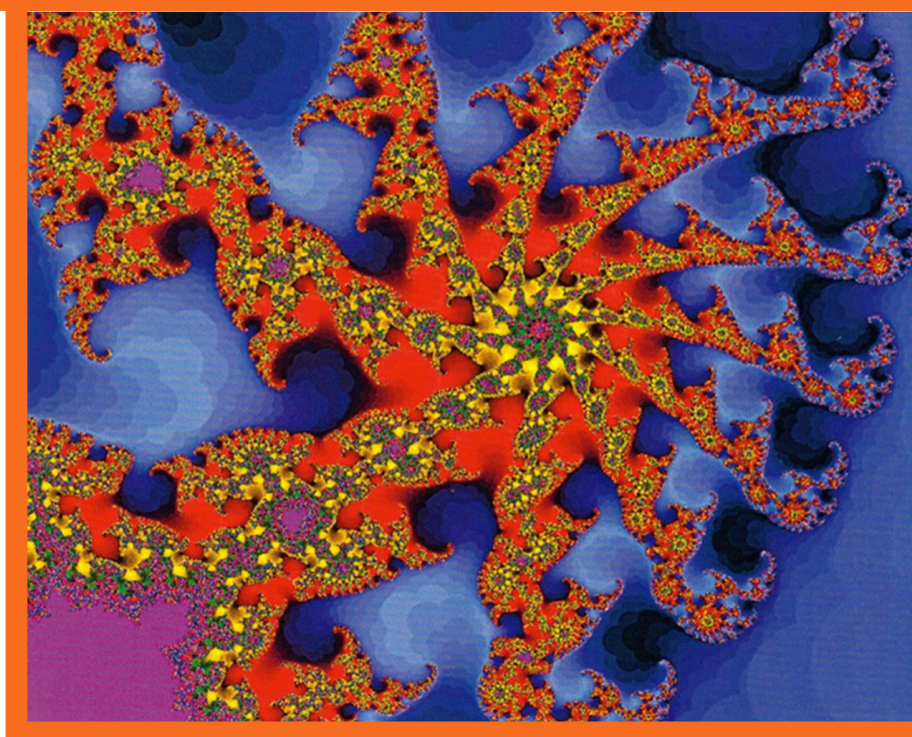


Il Metodo naturale in matematica

Materiali di riferimento

LABORATORIO DI RICERCA COOPERATIVA
ICEM - PÉDAGOGIE FREINET



RicercAzione

materiali per il lavoro in classe
Matematica

2

Perché questo libro?

Nel Movimento di Cooperazione Educativa opera dal 2020 il Gruppo Nazionale di Ricerca “Creazioni matematiche” che fa esplicito riferimento alle proposte di Paul Le Bohec illustrate nel libro *Il testo libero di matematica*. Da alcuni anni il gruppo intrattiene rapporti di formazione e di ricerca comune con il gruppo francese dell'ICEM - Pedagogia Freinet che ha redatto questi materiali. In particolare sono stati realizzati alcuni incontri con Danielle e Marcel Thorel che hanno illustrato agli insegnanti del gruppo come strutturare l'attività didattica nelle loro classi, con particolare riferimento alla *ricerca matematica libera*, tema principale di questo libro.

La sua traduzione si è rivelata quindi un passaggio indispensabile per poter affinare le proprie pratiche avendo maggior consapevolezza sia delle azioni dell'insegnante sia dei concetti matematici da sviluppare durante i percorsi in classe.

La traduzione del testo rappresenta per il gruppo di ricerca Nazionale “Creazioni matematiche” e per chi lavora nel solco dei metodi attivi e della pedagogia freinetiana in Italia una pietra miliare perché raccoglie in modo sistematico tutti gli aspetti della didattica che è necessario conoscere per mettere in piedi, in ciascuna classe, il *metodo naturale in matematica*. Non si tratta quindi di questioni generali, di dichiarazioni di intenti che potrebbero funzionare in ogni ambito ma si entra nel merito dell'epistemologia della matematica, si ricercano i significati profondi, si forniscono chiavi di lettura per analizzare le azioni didattiche che spingono il discorso collettivo dei bambini e delle bambine nella direzione dell'astrazione e della generalizzazione.

Questo testo prende le mosse da esempi concreti di creazioni matematiche e di ricerche realizzate dai bambini e dalle bambine, si procede attraverso una loro analisi che arriva al cuore dei concetti matematici sottesi, un'analisi che permette una messa a fuoco da parte dell'insegnante di tutti gli elementi che potrebbero essere ampliati e rilanciati al gruppo e che consente di generare variazioni, approfondimenti, cambi concettuali.

Tenere conto delle domande che nascono in classe, anche di quelle che non trovano immediata espressione formale ma si manifestano attraverso pochi segni sul foglio o attraverso un racconto durante l'*entretien* del mattino, non rappresenta più solo una finalità dichiarata ma si concretizza attraverso precise azioni che ciascun insegnante può praticare: cercare regolarità, invitare a argomentare, cercare la formalizzazione, mettere in gioco l'infinito, capovolgere il problema sono solo alcune delle azioni illustrate in questo testo che ci permetteranno di orientare con maggiore consapevolezza il nostro lavoro di fronte alle produzioni dei bambini e delle bambine.

In questo lavoro di traduzione intravediamo inoltre un'altra potenzialità che diventa trasversale a tutti gli ambiti del sapere e che ci richiama a ritornare con sempre maggiore consapevolezza ai *nuclei fondanti* di ciascuna disciplina perché promuovere la ricerca da parte dei bambini significa lavorare a fondo sui concetti che permetteranno loro di acquisire con sicurezza gli strumenti per “imparare a stare al mondo”.

Gruppo Nazionale di Ricerca MCE “Creazioni matematiche”

Sommario

PARTE PRIMA	9
IL METODO NATURALE IN MATEMATICA	9
Premessa	9
I. Epistemologia della matematica	12
1. Caratterizzazione della matematica	12
2. Caratterizzazione del processo di pensiero in matematica	14
3. Implicazioni per l'insegnamento nella pedagogia Freinet	14
II. Descrizione dell'approccio alla ricerca matematica libera	17
1. Schema illustrato del percorso didattico	17
2. Possibili dispositivi in tre classi di scuola primaria	24
III. Tipi di azioni dell'insegnante	28
1. Azioni sulle proposte dei bambini per incoraggiare la ricerca	29
2. Azioni per accompagnare la ricerca	41
PARTE SECONDA	47
CONCETTI MATEMATICI IN GIOCO SCHEDE PRATICHE	47
1. RELAZIONI	48
1.1. RELAZIONI QUALSIASI	49
1.2. RELAZIONE DI EQUIVALENZA	53
1.3. RELAZIONE D'ORDINE	58
2. FUNZIONI	61
2.1. FUNZIONE NON NUMERICA QUALSIASI	63
2.2. FUNZIONE NUMERICA DEL TIPO $y = x + a$	66
2.3. FUNZIONE NUMERICA DEL TIPO $y = ax$	70
2.4. FUNZIONE NUMERICA DEL TIPO $x + y = a$	76
2.5. FUNZIONE NUMERICA MODULO	81
2.6. LA COMBINATORIA (permutazioni, disposizioni, combinazioni)	86
2.7. SUCCESSIONI DI NUMERI	89
3. LEGGI DI COMPOSIZIONE	93
3.1. LEGGE DI COMPOSIZIONE NON NUMERICA	94
3.2. LEGGE DI COMPOSIZIONE NUMERICA INTERNA	99
4. CALCOLO MENTALE, CALCOLO RAPIDO	107
5. NUMERAZIONE, CODIFICA	110
6. INSIEMI NUMERICI	114
7. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE	118
7.1. TRASLAZIONE	119
7.2. SIMMETRIA ASSIALE	122
7.3. ROTAZIONE	126

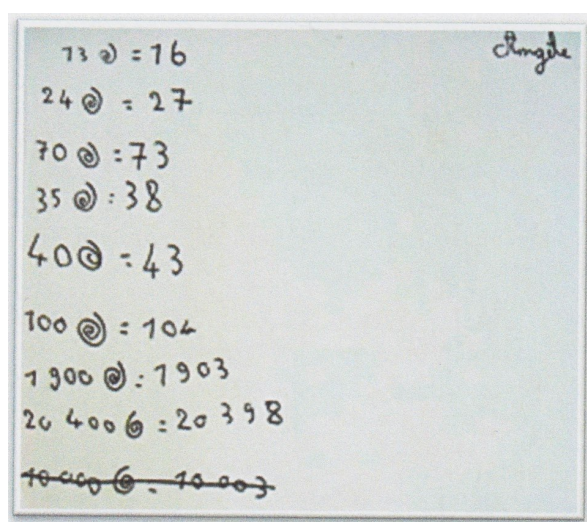
7.4. OMOTETIA	130
8. COSTRUZIONI GEOMETRICHE	134
ALLEGATO I	139
Ricerca sulla simmetria in una pluriclasse	139
ALLEGATO 2	148
Ricerca sulle sequenze di numeri in seconda e terza primaria	148
ALLEGATO 3	153
Ricerca sull'ottagono in quarta primaria	153
ALLEGATO 4	160
Estratto da un quaderno di matematica di classe prima	160
ALLEGATO 5	161
Estratto da un quaderno di matematica di classe quarta	161
BIBLIOGRAFIA	163
SITOGRAFIA	163

1. Schema illustrato del percorso didattico

1.1. Proposta iniziale

a. La proposta iniziale, che darà origine a un processo di trasformazione matematica, può essere lanciata durante il lavoro individuale, durante l'*entretien* mattutino, in occasione di una creazione, di una lettera di amici di penna, di presentazioni di lavori, di una scoperta fuori dalla scuola, ecc.

Angèle, classe terza, durante una ricerca matematica, presenta al gruppo la sua “macchina lumaca”.



b. La presentazione di questa “proposta” al gruppo suscita commenti e suggerimenti di ogni tipo: miglioramento di un disegno mal riuscito, desiderio di modificare alcuni dati, necessità di coerenza e regolarità, evidenziazione di relazioni tra oggetti, ipotesi, ecc.

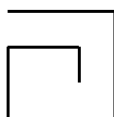
I bambini notano che a volte questa “macchina lumaca” aggiunge 3 o 4 e a volte toglie 2. Faccio notare che il segno “=” non può essere usato in questo caso perché abbiamo una “macchina” (la parola “macchina” viene spesso usata in classe per indicare una funzione, non un’operazione).

Tutti dicono che Angèle aveva sicuramente commesso un errore. Un alunno nota che una lumaca (l’ultima) stava girando nella direzione opposta alle altre, e probabilmente era per questo che stava “togliendo” invece che “mettendo”.

Angèle ci dice che le lumache che girano in senso orario “aggiungono” e quelle che girano in senso antiorario “tolgono”.

Inoltre, le lumache che girano 2 volte aggiungono o sottraggono 2, e quelle che girano 3 volte aggiungono o sottraggono 3...

Dorine dice che è difficile capire quanti giri fanno le lumache. Troviamo che sarebbe stato meglio avere una spirale quadrata, dove il numero di lati sarebbe stato più chiaro:



+ 6

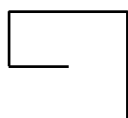


- 4

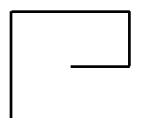
c. L’insegnante raccoglie e ordina i commenti in base al loro potenziale matematico, incoraggia la precisione nel linguaggio e nelle proposte e partecipa al dibattito mostrando interesse, curiosità e rigore.

Per andare oltre, che cosa potrebbe fare [Angèle]?

Alcuni bambini suggeriscono lumache che moltiplicano o dividono. Potrebbero essere lumache che si arrotolano, partendo dal basso.



$\times 5$



$: 5$

1.2. Sviluppo di un tema di ricerca, problematizzazione

a. Le osservazioni, le piste e le proposte avanzate consentono di sviluppare gradualmente l'argomento di ricerca, attraverso tentativi ed errori.

Cerchiamo di far funzionare le “lumache” con i numeri che ci diamo. Le “lumache” che moltiplicano ci costringono a rivedere la tecnica operativa della moltiplicazione e le tabelline.

b. Con l'aiuto dell'insegnante, il gruppo concorda alcune azioni specifiche da intraprendere.

Non sappiamo che far funzionare le lumache che dividono! Sappiamo che significa “suddividere” ma non sappiamo come fare. «Angèle, sarebbe bello sapere come far funzionare tutte quelle lumache che i tuoi amici hanno trovato. Vorresti provare a fare una ricerca? Per te va bene?»

1.3. Elementi per ulteriori ricerche

a. L'oggetto della ricerca è ora ben definito.

b. Il gruppo svolge queste prime azioni collettivamente e con attenzione.

c. Le iniziative individuali sono valorizzate.

1.4. *Tâtonnement* del gruppo e *tâtonnement* individuale

a. A seconda del grado di autonomia degli alunni, l'insegnante sceglie se proporre la ricerca a tutto il gruppo o solo a uno o due alunni.

b. Ricerca di gruppo.

c. Ricerca individuale (le lettere **b** e **c** possono essere invertite).

Angèle trasforma la sua lumaca “dividere per 5” in una griglia a 5 colonne per suddividere, dice, dei dolci.

48  ? 9 reste 3

51  ? 10 reste 1

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51				

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51				

Sceglie il numero 48 e prova a dividerlo per 5. Scrive i numeri fino a 48 e li distribuisce nelle 5 colonne. Commette qualche errore, che le faccio notare, e trova 9 caramelle per colonna con il resto di 3.

Prova con il numero 51 e trova 10, con il resto di 1.

Riprova la sua tecnica con il numero 34.

Le dico che il suo metodo è un po' lungo e che dobbiamo trovarne uno più veloce. Le chiedo se ha notato qualcosa mentre lavorava.

Dice di aver notato che l'ultima colonna di numeri va "di 5 in 5". Le suggerisco di scrivere solo l'ultima colonna e lei si lancia in una nuova sfida: dividere il numero 63 per 5. Ha scritto solo l'ultima colonna e ha detto: «Non posso andare oltre perché supero il 63».

Quindi scrive la risposta: «12 resto 3».

59  11 resto 4

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60

63  12 resto 3

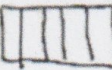
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60

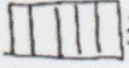
Prova la sua nuova tecnica con i numeri che ha scelto: 96 e 127.

96  ? 17 resto 1

Angole

5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95

127  ? 25 resto 2

182  36 resto 2

2
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200

5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100
105
110
115
120
125

erreur

Ci è riuscita. È molto felice. Lo presenta al gruppo.

Secondo contributo del gruppo.

Un bambino dice: «Per andare ancora più veloce, si potrebbe contare da 10 a 10».

Io dico: «Sì, ma a quel punto, quando fai un salto da 10, è come se avessi fatto 2 salti da 5, è come se avessi scritto 2 numeri».

Un altro suggerisce 20 per 20 o 50 per 50.

Secondo compito individuale.

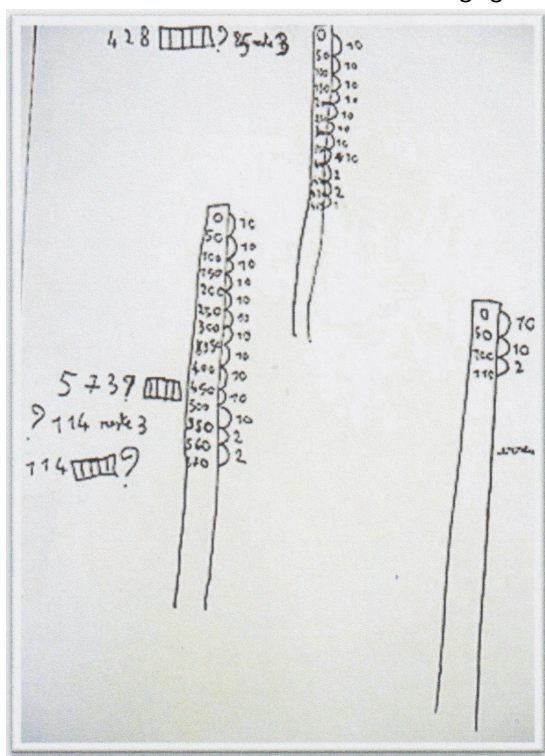
Angèle sceglie il numero 182 e inizia a contare di 10 in 10, notando che fa due salti da 5 ogni volta. Conta i salti. Trova la risposta "36 resto 2".

Per andare più veloce, le chiedo di stilare una tabella dei salti di 5: 1 salto è 5, 2 salti sono 10, 3 salti sono 15...

Armata di questa tabella, affronta il numero 253 e poi il 374, con successo. Quando non riesce più a fare 10 salti, guarda la sua tabella e si chiede come fare per avvicinarsi il più possibile a 374 senza superarlo.

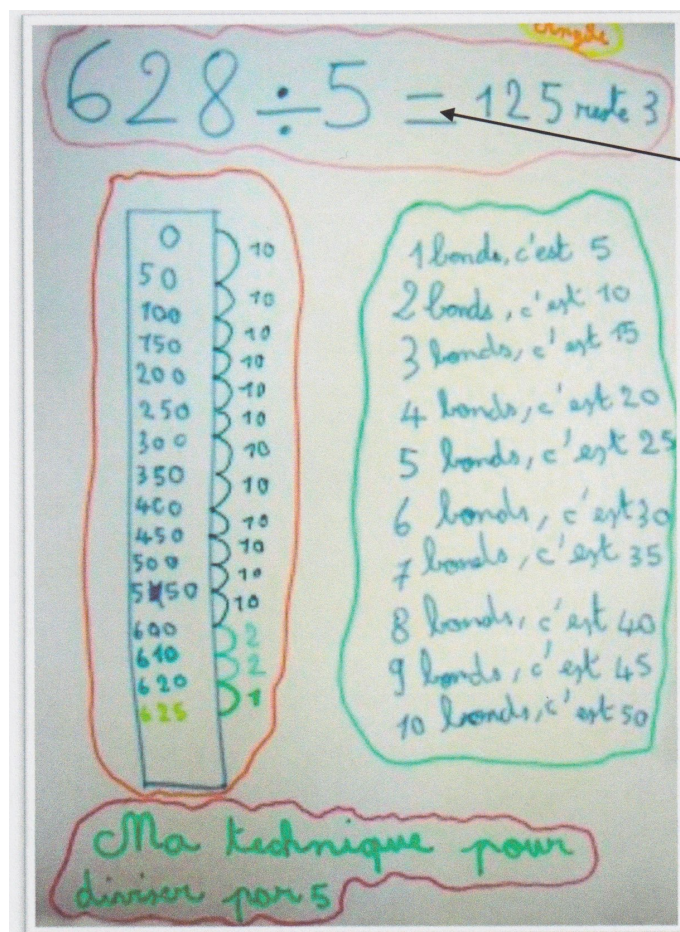
Quindi, in tutto, 7 volte 10 salti e 4 salti. In tutto, 74 salti da 5 per arrivare a 370. La risposta è "74 resto 4".

Angèle si esercita nella tecnica per diventare sempre più brava. Prova numeri sempre più grandi (428, 573) e continua ad accumulare successi di cui è molto orgogliosa.



Termina con il numero 893.

Per numeri più grandi, la tecnica richiede un po' di tempo. Angèle potrebbe quindi continuare la sua ricerca facendo un'altra tabella di salti di 5: 10 salti sono 50; 20 salti sono 100; 30 salti sono 150... fino a 100 salti.



Il segno = non è appropriato Il segno = non è appropriato
[perché non si tratta di una uguaglianza (N.d.T.)], in seguito
sarà sostituito da una freccia.

b. La ricerca si aggiunge al patrimonio matematico della classe.

Questo “patrimonio culturale della classe” può assumere diverse forme, soprattutto rispetto ai materiali: poster, portariviste, raccoglitori, grandi poster appesi a una rastrelliera, blog, ecc. L'importante è che possa essere consultato dai bambini.

Il cartellone di Angèle è una testimonianza della sua ricerca e diventerà parte del patrimonio della classe.

c. Verso l'appropriazione da parte di tutti delle nuove conoscenze.

L'insegnante può predisporre un momento collettivo in cui si avvale delle diverse tecniche di divisione emerse dalle ricerche dei bambini. Queste tecniche possono essere utilizzate come punto di partenza per l'appropriazione da parte della classe della tecnica “standard” della divisione, a seconda del livello dei bambini.

L'insegnante può anche preparare esercizi pratici basati su questo concetto. Questi esercizi faranno parte del lavoro matematico programmato in cui ogni bambino progredisce al proprio ritmo.

d. Cercare situazioni di vita che comportino l'utilizzo del modello scoperto.

Esempi:

- dividere 64 caramelle tra 5 bambini;
- quante scatole da 5 sono necessarie per contenere 342 matite?

III. Tipi di azioni dell'insegnante (Azioni di trasformazione elementari)

[...]

1. Azioni sulle proposte dei bambini per incoraggiare la ricerca

[...]

1.7. Esecuzione di variazioni

Il pensiero matematico è un pensiero che si utilizza per il suo potenziale di azione, di trasformazione, di creazione.

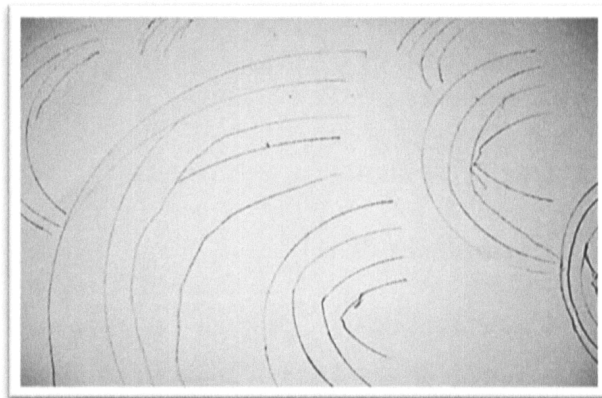
Si faranno variare le rappresentazioni (disegno, tabella, curva), le figure geometriche (quadrato, triangolo, cerchio, ecc.), gli strumenti (carta da lucido, griglia, *stencil*, calcolatrice, ecc.), gli insiemi di numeri (esplorare insiemi numerici naturali, frazioni, numeri decimali, ecc.)

Nella proposta di un bambino, ci sono spesso diverse variabili possibili. È preferibile farne variare solo una, quella che sembra essere la più rilevante per avviare la ricerca.

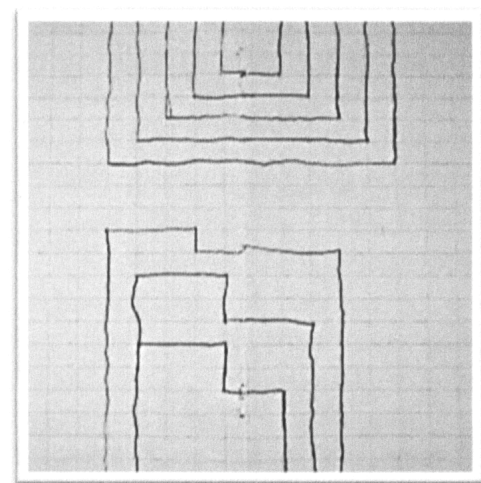
Esempio 1: variare il supporto e le figure



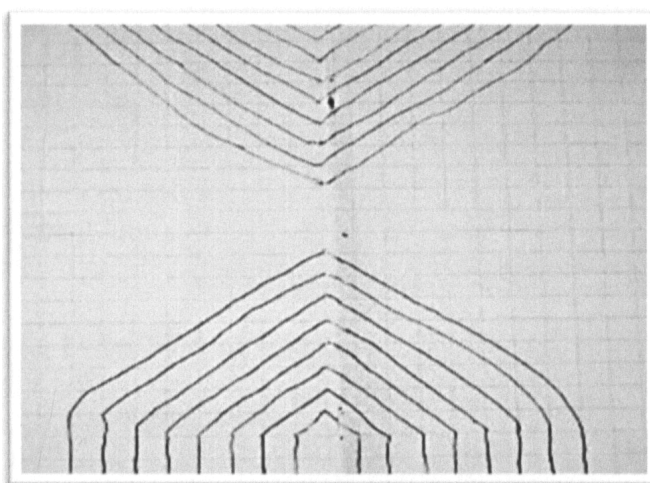
Doc 1. Creazione di un bambino di prima.



Doc. 2



Doc. 3



Doc. 4

Un bambino di prima presenta la sua creazione matematica al gruppo (Doc 1). L'insegnante incoraggia i bambini a usare il linguaggio matematico:

«Questo è un arcobaleno».

Insegnante: «Sì, ma come è fatto questo arcobaleno?»

«Con dei ponti».

Insegnante: «Che forma hanno i ponti?»

«Rotonda».

Insegnante: «In matematica si dice “cerchi”. Sono cerchi interi?»

«No, sono metà. Ma non sono “molto ben rotondi”».

Insegnante: «Florian voleva certamente fare dei semicerchi. Chi vuol provare a fare un semicerchio sulla lavagna con il grande compasso della classe?»

«È difficile!»

Insegnante: «Come sono questi semicerchi nella creazione di Florian?»

«Diventano sempre più grandi o sempre più piccoli, a seconda di dove si comincia. Alcuni sono più stretti di altri».

Gli alunni cercano di disegnare semicerchi sempre più grandi su fogli di carta bianca con il loro compasso (Doc 2). Ma il risultato non è soddisfacente, perché i bambini di prima elementare non sono molto bravi a gestire il compasso.

Per superare l'insuccesso, l'insegnante suggerisce di disegnare figure di dimensioni crescenti o decrescenti su carta quadrettata (Doc 3 e 4). Gli errori vengono corretti durante le presentazioni di gruppo (cfr. [Omotetia](#)).

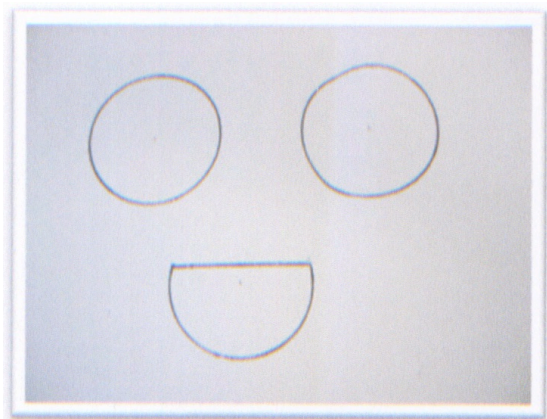
Esempio 2: variare gli insiemi di numeri

A un bambino di quinta elementare che fa una ricerca per trovare la metà dei numeri naturali si può chiedere di continuare la sua ricerca nell'insieme delle frazioni o dei numeri decimali.

Qual è la metà di $1/5$? Di 3,77...?

Esempio 3: dal dominio geometrico al dominio numerico

Una bambina di terza elementare propone al gruppo questa creazione geometrica



«Ha fatto due cerchi e un mezzo cerchio».

«Non è un semicerchio, la linea va oltre il centro».

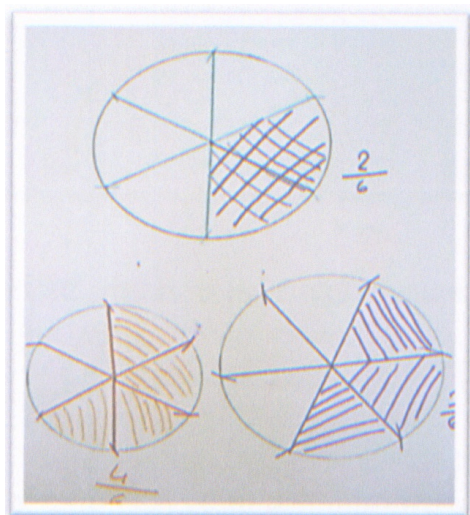
Insegnante: «Allora, è più grande o più piccolo di un semicerchio?»

«È più grande!»

Insegnante: «Se è più grande di $1/2$, cosa potrebbe essere come frazione di cerchio?»

I bambini propongono: $1/5$, $3/4$, $5/6$.

:



Inizia una ricerca, ma questa si rivela molto più complessa di quanto sembri, il segmento che rappresenta la parte superiore della bocca non passa attraverso il centro...

In questi tre esempi, l'insegnante fa capire agli alunni che possono trasformare la loro proposta, che hanno la possibilità di agire su di essa.



Una classe in ricerca a partire dalla proposta di un bambino.

Nelle classi Freinet, come possiamo constatare con chiarezza, è l'area della matematica che spesso pone la maggiore resistenza alla pratica centrata sul bambino. Perché nelle nostre classi, quando si tratta della matematica, l'alunno, che ha la possibilità di esprimersi, di creare, di comunicare, di esplorare il suo ambiente, di organizzarsi in modo cooperativo, sembra così spesso assente, come escluso dai processi di apprendimento?

In effetti, gli insegnanti che desiderano adottare il Metodo naturale in matematica affrontano difficoltà ricorrenti: cosa fare con la creazione di un bambino?

Come reagire? Sentiamo che questo evento che avviene in classe porta con sé un concetto matematico, ma come possiamo coinvolgere i bambini in un fruttuoso percorso di ricerca? Come possiamo garantire che attraverso questa ricerca l'apprendimento della matematica abbia successo?

È sembrato quindi necessario al LRC (Laboratorio di Ricerca Cooperativa ICEM) proporre questo insieme di materiali per mettere in risalto le azioni dell'insegnante: cosa dicono e cosa fanno l'insegnante e il gruppo per trasformare gradualmente le proposte dei bambini in strumenti matematici di conoscenza all'interno di un ambiente cooperativo che allo stesso tempo funzioni come supporto e come stimolo?

Queste trasformazioni, per essere pertinenti, devono rispettare un duplice vincolo: essere il più possibile in accordo con l'epistemologia della matematica, che abbiamo cercato di presentare succintamente nella seconda parte del testo, e, nello stesso tempo, rispettare i *tâtonnement* dei bambini, cioè il loro procedere per tentativi ed errori. Il processo di trasformazione deve quindi essere messo in relazione con l'insieme complesso delle situazioni reali e vissute della classe. Così concepite, sono al centro di questo lavoro, che vuole essere un materiale di riferimento complesso.

Le situazioni didattiche sono analizzate sulla base di alcuni testi teorici e descritte nel modo più preciso possibile in una serie di schede pratiche. Queste schede ridefiniscono i concetti matematici essenziali per supportare i bambini nella loro ricerca. Gli stessi concetti matematici sono illustrati con esempi tratti dalla vita quotidiana e da numerose situazioni di classe.

Il Laboratorio di Ricerca Cooperativa dell'ICEM

Il Laboratorio si è costituito nel 2005 con l'obiettivo di svolgere un'attività di ricerca di carattere scientifico, finalizzata alla teorizzazione e alla critica delle pratiche pedagogiche di Freinet. Il laboratorio si è sforzato di descrivere le pratiche effettive, di spiegarne il funzionamento, di comprenderne la complessità, al fine di produrne un'analisi razionale, oggettiva e con solide basi teoriche. Il ruolo della ricerca è stato di produrre nuove conoscenze e conoscenze solide, in grado di resistere all'esame della comunità scientifica.

Il laboratorio ha prodotto strumenti per una formazione efficiente e generalizzabile nella pedagogia Freinet, basata sui risultati dei lavori di ricerca. L'obiettivo formativo ha sempre accompagnato il lavoro teorico per produrre e trasmettere conoscenze operative a chi voleva adottare il Metodo naturale.

Attualmente, il laboratorio ha abbandonato la ricerca in senso stretto e sta lavorando sia alla revisione critica di quanto realizzato finora, mettendolo alla prova dei fatti con la raccolta delle documentazioni degli sperimentatori, sia alla creazione di materiali, come questa pubblicazione, per supportare gli insegnanti nella pratica del Metodo naturale in diverse discipline scolastiche, non solo in Matematica.

Per maggiori informazioni: <https://www.icem-pedagogie-freinet.org/presentation-lrc>